AALBORG UNIVERSITET

Kan man lægge uendeligt mange tal sammen?

I videoen så vi, hvordan man kan lægge uendeligt mange tal sammen. Mange af de argumenter, der blev givet i videoen, er dog for upræcise til, at en rigtig matematiker vil være tilfreds. Det vil vi forsøge at råde bod på i disse opgaver.

I videoen blev det forklaret, at en række havde en værdi, hvis dens afsnitsfølge nærmede sig et tal. Men hvordan beskriver man præcist, hvad det betyder, at en følge nærmer sig et tal i matematisk forstand?

For at afgøre, om to tal er "tæt" på hinanden, skal vi have en måde at "måle" afstanden mellem to tal på. Det gør vi ved at bruge absolutværdien, hvor absolutværdien af et tal x er givet ved:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & hvis\ x \geq 0 \\ -x, & hvis\ x < 0 \end{cases}.$$

Afstanden fra et tal x til et tal y definerer vi til at være $|x-y|$. Eksempelvis er afstanden fra 3 til 1 lig $|3-1| = |2| = 2$, mens afstanden fra -1 til 1 er $|-1-1| = |-2| = 2$. Hvis man betragter en tallinje og tæller mellem 3 og 1, samt -1 og 1, vil man se, at dette giver god mening. Bemærk at vores definition af afstand mellem tal opfylder:

1. Afstanden fra x til y er det samme som afstanden fra y til x: Altså $|x-y| = |y-x|$.
2. Afstanden fra x til x er 0.
3. Afstanden er aldrig negativ.
4. Den direkte afstand er den korteste: For alle x, y og z gælder
$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$
Med andre ord er afstanden fra x til y kortere end eller lig med afstanden fra x til z plus afstanden fra z til y.

Når vi har styr på afstanden mellem to tal, kan vi også definere, hvad det betyder, at en følge nærmer sig et tal. Betragt en følge af tal $\{a_n\}_{n\geq 1}$ bestående af tallene

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

og et tal a. For at vi kan sige, at følgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$ nærmer sig tallet a, bør vi som minimum kræve, at der findes et tal N_1, således at når $n \geq N_1$, så er $|a_n - a| < 1$. Så ved vi i hvert fald, at fra et vist trin vil alle efterfølgende tal i følgen have en afstand til a på højst 1. Hvis vi f.eks. betragter følgen $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$, som består af tallene

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

så vil vi have, at $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 1$, når $n \geq 2$. Men det er ikke nok til, at vi kan sige, at $\{a_n\}_{n\geq 1}$ nærmer sig a, fordi det kunne være, at afstanden $|a_n - a\,|$ altid vil være større end $0{,}5$. Så vi bør også kræve, at der findes et tal $N_{0,1}$, således at når $n \geq N_{0,1}$, så er $|a_n - a| < 0{,}1$. Så ved vi i hvert fald, at fra et vist trin vil alle efterfølgende tal i følgen have en afstand til a på højst $0{,}1$. Hvis vi igen betragter eksemplet med $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$, vil vi have, at $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0{,}1$, når $n \geq 11$. Men er vi kommet tæt nok på nu? Svaret er nej, fordi det godt kunne ske, at $|a_n - a\,|$ altid er større end $0{,}05$. Vi skal altså tættere på! Man kunne fortsætte og kræve, at der findes et tal $N_{0,01}$ så at $|a_n - a| < 0{,}01$, når $n \geq N_{0,01}$, osv. i det uendelige. Det er faktisk det, vi vil gøre, men vi skriver det på en lidt smartere måde:

*Følgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$ **konvergerer** mod a, hvis der for alle $\epsilon > 0$ findes et tal N, således at når $n \geq N$ så er*

$$|a_n - a| < \epsilon,$$

Vi skriver, at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Ovenstående definition er, hvad en matematiker forstår ved, at en følge nærmer sig et tal. Bemærk, at matematikere kalder dette for konvergens. Bemærk også, at vi i stedet for at bruge tallene 1; 0,1; 0,01, osv. bruger bogstavet ϵ. Man kan tænke på ϵ som et meget lille tal.

Vi giver nu to eksempler på, hvordan denne definition anvendes.

1. Betragt følgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$ hvor $a_n = \frac{1}{n}$. Vi vil vise at denne følge konvergerer mod (nærmer sig) 0. Altså skal vi vise, at for alle $\epsilon > 0$ findes et tal N således at

   $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

   når $n \geq N$.

   Lad $\epsilon > 0$ være vilkårlig. Uligheden $\frac{1}{n} < \epsilon$ er ækvivalent med at $\frac{1}{\epsilon} < n$. Så hvis vi vælger $N > 1/\epsilon$, så gælder for $n \geq N$ at $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$.

2. Betragt følgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$, hvor $a_n = n^r$ for $r < 0$. Vi vil vise at denne følge konvergerer mod (nærmer sig) 0. Altså skal vi vise, at for alle $\epsilon > 0$ findes et tal N således at

   $$|n^r - 0| = n^r < \epsilon$$

   når $n \geq N$.

   Lad $\epsilon > 0$ være vilkårlig. Uligheden $n^r < \epsilon$ er ækvivalent med at $\left(\frac{1}{\epsilon}\right) < n^{-r}$. Da $-r > 0$ kan vi tage en $-r$'te rod på begge sider af uligheden og bevare ulighedstegnet. Altså får vi, at $n^r < \epsilon$ er ækvivalent med $\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{-r}} < n$. Så hvis vi vælger $N > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{-r}}$, så gælder for $n \geq N$ at $n^r \leq N^r < \epsilon$.

Vi vil senere skulle bruge følgende resultat, men det er for teknisk at bevise her:

Lad $\{a_n\}_{n\geq 1}$ være en følge som er voksende (altså der gælder at $a_n \leq a_{n+1}$ for alle n) og opadtil begrænset (altså der findes et tal M så $a_n \leq M$ for alle n). Så er følgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$ konvergent.

Opgave 1: Konvergens.

Løs følgende opgaver om konvergens af følger:

1.1. Argumentér for, at $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & hvis\ x \geq 0 \\ -x, & hvis\ x < 0 \end{cases}$

1.2. Vis at $|x-y| = |y-x|$. Hint: Brug, at $\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{((-1)(y-x))^2}$

1.3. Brug samme metode som for $\frac{1}{n}$ til at vise, at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b+an} = 0$, hvor $a, b > 0$.

1.4. Bernoullis ulighed siger at $(1+x)^n \geq 1 + nx$, for alle heltal $n \geq 0$ og alle $x \geq -1$. Vi skal bruge dette til at vise at $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, for alle a som opfylder $-1 < a < 1$.

a. Lad $x = \frac{1}{|a|}$ og argumentér for, at $x > 1$.

b. Brug Bernoullis ulighed til at vise, at

$$x^n = (1 + (x-1))^n \geq 1 + n(x-1).$$

c. Brug punkt a. og b. til at vise, at

$$|a|^n \leq \frac{1}{1 + n(x-1)}.$$

d. Argumentér for, at $|a|^n = |a^n|$, og brug dette sammen med punkt c. samt opgave 4 til at vise, at $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Opgave 2: Rækker

2.1. I videoen blev det vist, at

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

I denne opgave skal vi vise, at der for $-1 < a < 1$ gælder, at

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

a. Lad $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$. Argumentér for at

$$(1-a)S_n = (1 + a + a^2 + \cdots + a^n) - (a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1}) = 1 - a^{n+1}.$$

b. Brug a. til at vise, at

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.$$

c. Argumentér vha. b. og opgave 1.5. for, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}.$$

I de næste opgaver skal vi vise at følgende resultat, som blev præsenteret i videoen:

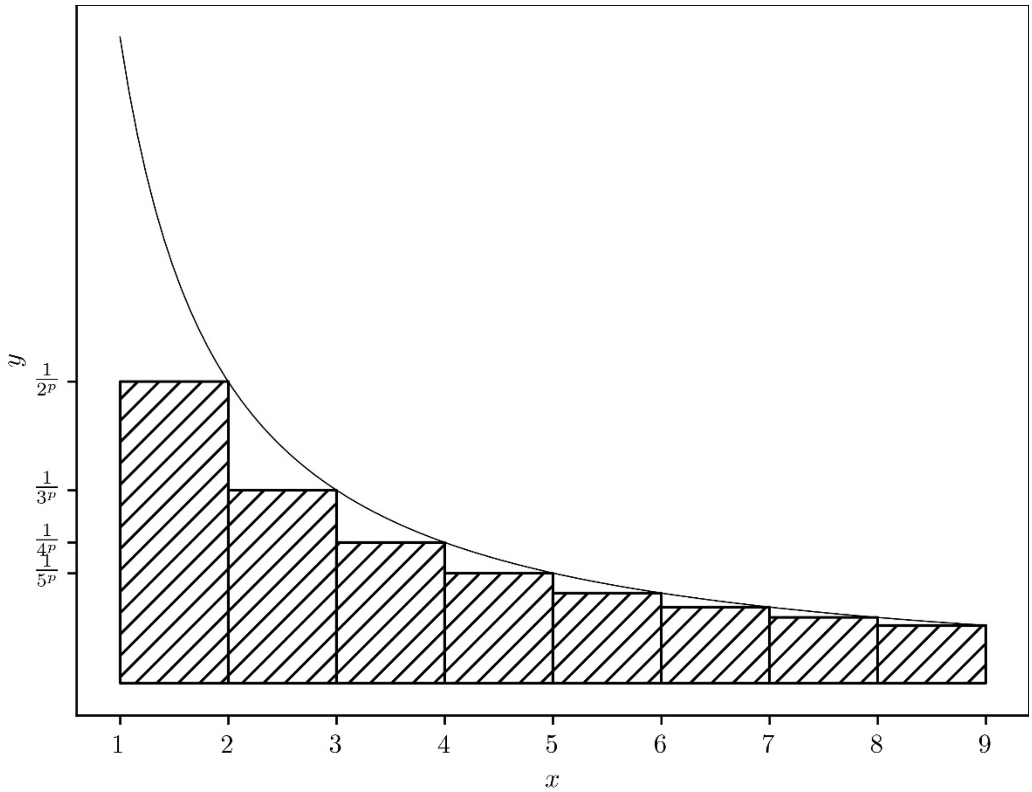
Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

er konvergent for $p > 1$ og divergent for $p \leq 1$. Tilfældet $p = 1$ er den geometriske række, og i videoen så vi at hvis $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$ så gælder at

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right) \\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^N}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right) \\ &= 1+\frac{N}{2} \end{aligned}$$

hvilket viser at den harmoniske række ubegrænset og derfor divergent.



Figur 1: Approksimation af arealet under grafen for $\frac{1}{x^p}$

2.2. Antag, at $p < 1$. Vi vil vise, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ er divergent.

a. Argumentér for, at $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b. Brug a. til at vise, at
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p},$$

c. Brug b. samt divergensen af den harmoniske række til at argumentere for, at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ divergerer, når $p < 1$.

2.3. Antag nu, at $p > 1$. Vi skal se, hvordan integralregning kan anvendes til at bevise konvergensen af $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

a. Argumentér ud fra Figur 1 for, at følgende ulighed gælder:
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p} \leq 1+\int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx.$$

b. Vis, at

$$\int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}(N^{1-p}-1)$$

c. Brug a. og b. sammen med 2. fra indledningen til at argumentere for, at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \le \frac{p}{p-1}$$

d. Argumentér for, at afsnitsfølgen $S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p}$ er voksende, og brug dette sammen med resultatet i indledningen til at argumentere for, at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ er konvergent, når $p > 1$.

Opgave 3: Elementære funktioner

Funktionerne $\sin(x)$, $\cos(x)$ og eksponentialfunktionen $\exp(x) = e^x$ kan beskrives som en særlig slags række; såkaldte potensrækker. Disse kan tænkes på som polynomier med uendelig grad.

3.1. Der gælder for alle x at $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, hvor $n! = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot n$ (og $0! = 1$). Det kan vises, at eksponentialfunktionen kan differentieres ved at differentiere rækken ledvist: $\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!}$.

a. Vis, at $\exp(0) = 1$.
b. Brug reglen om ledvis differentiation til at vise, at $\exp'(x) = \exp(x)$.

3.2. Der gælder for alle x at $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ samt at $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, hvor $n! = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot n$. Det kan vises, at man ligesom for eksponentialfunktionen kan differentiere de to rækker ledvist.

a. Vis at $\cos(0) = 1$ og at $\sin(0) = 0$.
b. Brug reglen om ledvis differentiation til at vise, at $\sin'(x) = \cos(x)$.
c. Brug reglen om ledvis differentiation til at vise, at $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Opgave 4: Ekstra opgave for den flittige gymnasieelev.

Vi har set, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergerer for $p > 1$, men faktisk kan man give mening til rækken for alle tal p (undtagen 1) på formen $s = a + ib$, hvor a og b er reelle tal og i er den såkaldte imaginære enhed, der opfylder $i^2 = -1$. Vi vil ikke komme nærmere ind på detaljerne her. I den forbindelse definerer man funktionen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Det kan vises at $\zeta(-2n) = 0$ for $n = 1, 2, 3, \dots$.

4.1. Vis, at alle andre punkter s, som opfylder $\zeta(s) = 0$, er på formen $s = \frac{1}{2} + it$, hvor t er et reelt tal. (Dette problem kaldes også *Riemann hypotesen* og er et af de mest berømte uløste matematiske problemer. Der er udlovet en ”dusør” på 1 million dollars for løsningen af problemet (http://www.claymath.org/).)